

応力集中問題における体積力法の 特異積分方程式の数値解析法*

(第2報, 切欠きの干渉問題の一般的解析法)

野田 尚 昭^{*1}, 松 尾 忠 利^{*2}

Numerical Solution of Singular Integral Equations of the Body Force Method in Notch Problems (2nd Report, Analysis of Interaction Problems of Notches under General Loading Conditions)

Nao-Aki NODA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations of the body force method in interaction problems of notches and holes under general loading conditions. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where the densities of body forces distributed in the x - and y -directions are to be unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the notches, several types of fundamental density functions are proposed; then, the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The accuracy of the present analysis is verified by comparing with the results obtained by the previous method. The present method is found to give rapidly converging numerical results for stress distribution along the notch boundaries.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Notch

1. 緒 言

体積力法は, 切欠きの応力集中係数や, き裂の応力拡大係数の解析に数多く応用されている。体積力法は, 解析しようとする問題を, 無限板中の仮想境界面上に体積力または, 食違いを分布させることによって表現するものである。問題を解くことは, 未知関数である仮想境界面上の体積力密度, あるいは, 食違い密度を求めることに帰着される。

第1報において, き裂問題^{(1)~(5)}だけでなく切欠き問題においても, 未知関数である体積力密度を, 基本密度関数と階段関数の積で近似する従来の体積力法よりも, 階段関数の代わりに多項式を用いて近似する方法が, 特に境界上の応力分布を求める場合などに数値計算上便利であり少ない計算時間で高精度の解析が可能であることを示した⁽⁶⁾。しかし, 無限板中の2だ円孔の干渉問題の解析において, 仮想境界上に引張型の体積力を分布させただけでは, 最大応力の値はLingの解析結果⁽⁷⁾とほぼ一致するにもかかわらず, 逆対称

型の応力成分が打ち消されずに残るために境界条件を完全に満足させることができない場合があることがわかった。そこで本報では, 境界条件を完全に満足させるために必要な新しい基本密度関数を定義し, 複数個のだ円孔の干渉問題を体積力法の特異積分方程式を厳密に解くことにより解析する方法を示す。この方法で2だ円孔の干渉問題の応力集中係数を求め, 前報の解析結果や従来の未知関数を階段関数で近似した方法や過去の数値解析方法と解析結果を比較する。

2. 切欠きの干渉問題における体積力法の 特異積分方程式の数値解析法

2・1 体積力法の特異積分方程式 遠方で一様な x 方向の引張応力 σ_x^∞ , y 方向の引張応力 σ_y^∞ を受けるような無限板中の $k=1\sim m$ 個のだ円孔 ($x_k=a_k \cos \theta_k$, $y_k=b_k \sin \theta_k$) の干渉問題を例にとる。この問題は, 重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により, 孔のない無限板中の一点 ($\xi_k=a_k \cos \phi_k$, $\eta_k=b_k \sin \phi_k$) に集中力が働くときの任意の点 (x_k, y_k) の応力場の解を用いて解くことができる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。このとき問題は, だ円孔となるべき仮想境界上に分布させた x_k, y_k 方向の, 境界に沿った長さ当たりの体積力密度 $\rho_x^*(\phi_k)$, $\rho_y^*(\phi_k)$ を未知関数とする特異積分方程式 [式(1)] で

* 平成4年10月1日 第70期全国大会において講演, 原稿受付 平成4年7月27日。

^{*1} 正員, 九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

^{*2} 学生員, 九州工業大学大学院。

表現される $[\phi_k$ は着力点 (ξ, η) を表す角度で θ_k と区別して用いる].

$$\begin{aligned}
 & (-1/2)\{\rho_x^*(\theta_i)\cos\theta_{io} + \rho_y^*(\theta_i)\sin\theta_{io}\} \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^*(\phi_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} K_{nn}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^*(\phi_k) ds \\
 & = -(\sigma_x^\infty \cos^2 \theta_{io} + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_{io}) \\
 & (-1/2)\{-\rho_x^*(\theta_i)\sin\theta_{io} + \rho_y^*(\theta_i)\cos\theta_{io}\} \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} K_{nt}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^*(\phi_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} K_{nt}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^*(\phi_k) ds \\
 & = -\{(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)\sin\theta_{io}\cos\theta_{io}\} \\
 & i=1 \sim m, 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 -d\xi &= a_k \sin \phi_k d\phi_k, d\eta = b_k \cos \phi_k d\phi_k \\
 ds &= \sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k} d\phi_k \\
 \theta_{io} &= \theta_{io} + \phi_i \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

である。また、 θ_{io} は点 (x_i, y_i) における i 番めのだ円の外向き法線と x_i 軸のなす角度、 ϕ_i は x_i 軸と x 軸のなす角度である。 $\sum_{k=1}^m$ は $k=1 \sim m$ の各だ円孔となるべき仮想境界について体積力密度を積分することを意味する。

式(1)は仮想境界上における、 i 番めのだ円孔縁 Γ_i の境界条件 $\sigma_n=0, \tau_{nt}=0$ に相当している。式(1)の第1項は、体積力を $\ominus$ 境界 (境界内部の点で境界に無限に近い点からなる境界⁽⁹⁾) に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i)$ を例にとると、これは孔のない無限板中の k 番めのだ円とな

る仮想境界上の一点に x_k 方向の単位大きさの集聚力が作用するとき i 番めのだ円となる境界上の点に生じる法線方向の応力 σ_n を意味する。式(1)の第2, 第3項は、 $i=k$ のとき $\sin\{(\theta_i - \phi_i)/2\}$ の特異性を有する。そのため、 $\theta_i = \phi_i$ の場合には、積分のコーシーの主値を取るものとする。

特異積分方程式 [式(1)] の未知関数である $\rho_x^*(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k)$ を次のように表す。

$$\begin{aligned}
 \rho_x^*(\phi_k) &= \frac{dF_\xi}{ds} = \frac{dF_\xi}{d\eta} n_x = \rho_x(\phi_k) n_x \\
 \rho_y^*(\phi_k) &= \frac{dF_\eta}{ds} = -\frac{dF_\eta}{d\xi} n_y = \rho_y(\phi_k) n_y \\
 &\dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

ここで、 dF_ξ, dF_η は微小要素 ds に作用する力の ξ_k, η_k 方向の成分である。また、 n_x, n_y は、仮想境界上の点 (x_k, y_k) における単位外向き法線ベクトルの座標成分 $(\cos \theta_{ko}, \sin \theta_{ko})$ であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 n_x(\phi_k) &= \frac{b_k \cos \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} \\
 n_y(\phi_k) &= \frac{a_k \sin \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} \\
 &\dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

また、 $\rho_x(\phi_k), \rho_y(\phi_k)$ は、 x_k, y_k 方向の投影長さ当たりの体積力密度である。

$$\rho_x(\phi_k) = \frac{dF_\xi}{d\eta}, \rho_y(\phi_k) = -\frac{dF_\eta}{d\xi} \dots \dots \dots (5)$$

式(3)の表現を用いると式(1)の特異積分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & (-1/2)\{\rho_x(\theta_i)\cos^2 \theta_{io} + \rho_y(\theta_i)\sin^2 \theta_{io}\} \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x(\phi_k) b_k \cos \phi_k d\phi_k \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y(\phi_k) a_k \sin \phi_k d\phi_k \\
 & = -(\sigma_x^\infty \cos^2 \theta_{io} + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_{io}) \\
 & (-1/2)\{-\rho_x(\theta_i) + \rho_y(\theta_i)\}\sin\theta_{io}\cos\theta_{io} \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nt}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x(\phi_k) b_k \cos \phi_k d\phi_k \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nt}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y(\phi_k) a_k \sin \phi_k d\phi_k \\
 & = -\{(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)\sin\theta_{io}\cos\theta_{io}\} \\
 & i=1 \sim m, 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

従来の体積力法による解析では $\rho_x(\phi_k), \rho_y(\phi_k)$ を階段関数で近似して、積分方程式を離散化し解析しているが³、本研究では以下に示す解法を用いる。

2・2 基本密度関数の定義 x 方向の体積力の基本密度関数 $w_x(\phi_k)$ および y 方向の体積力の基本密度関数 $w_y(\phi_k)$ を次式で定義する。

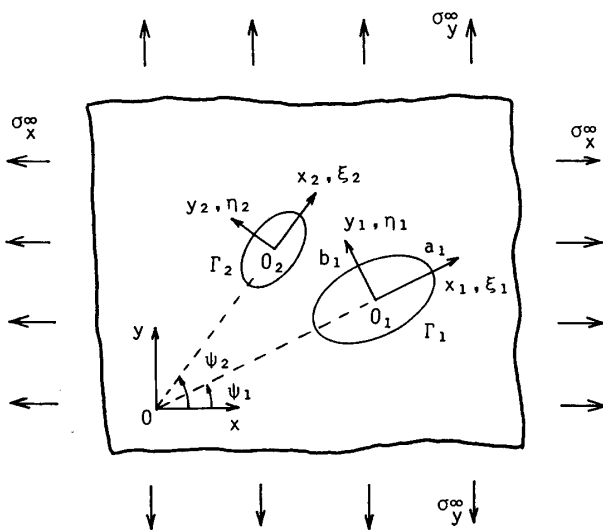


図 1 無限板中の複数のだ円孔

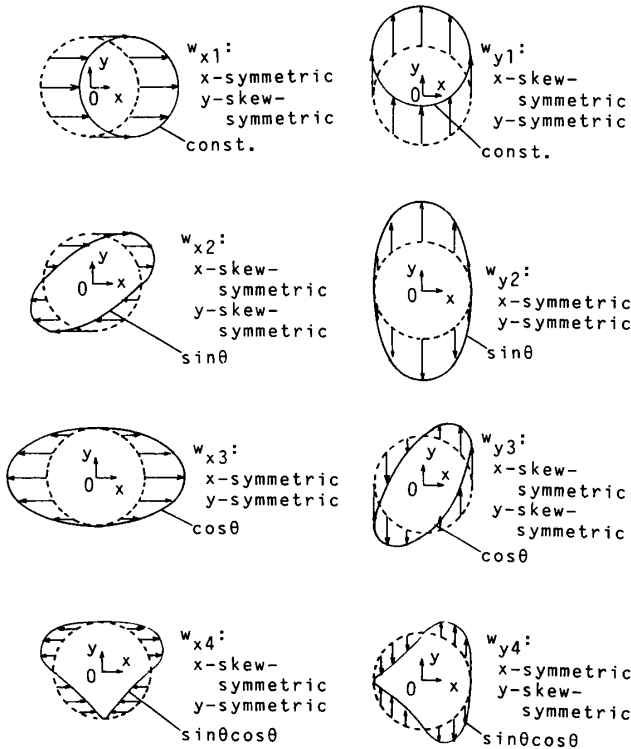


図2 基本密度関数

$$\left. \begin{aligned} w_{x1}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) / \cos \phi_k \\ w_{x2}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \tan \phi_k \\ w_{x3}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \\ w_{x4}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \sin \phi_k \\ w_{y1}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) / \sin \phi_k \\ w_{y2}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \\ w_{y3}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \\ w_{y4}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{y1}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) / \sin \phi_k \\ w_{y2}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \\ w_{y3}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \\ w_{y4}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

式(7)で定義される基本密度関数の組合せによって、 $\rho_x^*(\phi_k)$, $\rho_y^*(\phi_k)$ を次のように表現する。

$$\begin{aligned} \rho_x^*(\phi_k) &= \rho_{x1}(\phi_k) w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x2}(\phi_k) w_{x2}(\phi_k) \\ &\quad + \rho_{x3}(\phi_k) w_{x3}(\phi_k) + \rho_{x4}(\phi_k) w_{x4}(\phi_k) \\ \rho_y^*(\phi_k) &= \rho_{y1}(\phi_k) w_{y1}(\phi_k) + \rho_{y2}(\phi_k) w_{y2}(\phi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1/2)[\{\rho_{x3}(\theta) + \rho_{x1}(\theta) / \cos \theta\} \cos^2 \theta_0 + \{\rho_{y2}(\theta) + \rho_{y4}(\theta) \cos \theta\} \sin^2 \theta_0] \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nn'}^{Fx'}(\phi, \theta) \{\rho_{x3}(\phi) + \rho_{x1}(\phi) / \cos \phi\} b \cos \phi d\phi + \int_0^{2\pi} K_{nn'}^{Fy'}(\phi, \theta) \{\rho_{y2}(\phi) \\ &\quad + \rho_{y4}(\phi) \cos \phi\} a \sin \phi d\phi = -(\sigma_x^\infty \cos^2 \theta_0 + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_0) \\ &(-1/2)[-\{\rho_{x3}(\theta) + \rho_{x1}(\theta) / \cos \theta\} + \{\rho_{y2}(\theta) + \rho_{y4}(\theta) \cos \theta\}] \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nt'}^{Fx'}(\phi, \theta) \{\rho_{x3}(\phi) + \rho_{x1}(\phi) / \cos \phi\} b \cos \phi d\phi + \int_0^{2\pi} K_{nt'}^{Fy'}(\phi, \theta) \{\rho_{y2}(\phi) \\ &\quad + \rho_{y4}(\phi) \cos \phi\} a \sin \phi d\phi = -(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

本研究では未知関数を連続関数として近似するために多項式を用いる。いま問題の対称性より次のような表現を用いる。

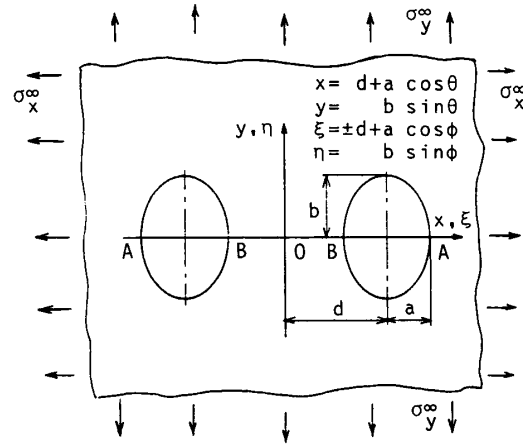


図3 無限板中の2だ円孔

$$\begin{aligned} &+ \rho_{y3}(\phi_k) w_{y3}(\phi_k) + \rho_{y4}(\phi_k) w_{y4}(\phi_k) \\ &\dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式(7)で示される基本密度関数を、境界が円形の場合について図2に示す。式(8)の表現を用いるものとする。 $0 \leq \phi_k \leq \pi/2$ で定義され、 x_k, y_k 軸に対称な関数 $\rho_{x1}(\phi_k), \rho_{x2}(\phi_k), \dots, \rho_{y4}(\phi_k)$ を用いて、 $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$ で定義される関数 $\rho_x^*(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k)$ が表現できる。

2・3 無限板中の等大2だ円孔の解析例 上述の基本密度関数を具体的問題を適用するために、図3に示すように遠方で一様な x 方向の引張応力 σ_x^∞ , y 方向の引張応力 σ_y^∞ を受ける無限板中の大きさの等しい2だ円孔の問題を例にとる。この場合図3の y 軸に対称な二点 $[\xi = \pm(d + a \cos \phi), \eta = b \sin \phi]$ に y 軸に対称に二つの集中力が働くときの任意の点 $(x = a \cos \theta, y = b \sin \theta)$ の応力場の解 $(K_{nn'}^{Fx'}, K_{nn'}^{Fy'}, K_{nt'}^{Fx'}, K_{nt'}^{Fy'})$ を用いるものとする。問題の x 軸対称性を考慮して、基本密度関数として、 $w_{x1}(\phi), w_{x3}(\phi), w_{y2}(\phi), w_{y4}(\phi)$ を採用すれば、問題は式(9)の特異積分方程式で表現される。 θ_0 はだ円の外向き法線と x 軸のなす角である。

$$\rho_{x3}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} a_n t_n(\phi), \rho_{x1}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} b_n t_n(\phi), \rho_{y2}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} c_n t_n(\phi), \rho_{y4}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} d_n t_n(\phi) \quad (10)$$

$$t_n(\phi) = \cos\{2(n-1)\phi\} \quad (11)$$

ここで M は $0 \leq \phi \leq \pi$ の範囲の選点数である。

以上の離散化の方法により、式(9)の積分方程式は係数 a_n, b_n, c_n, d_n についての $2M$ 元の連立方程式 [式(13)] に還元される。境界条件を満足させる点は式(12)で定義される。

$$\theta_l = (\pi/M)(l-0.5) \quad l=1 \sim M \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_n A_n + b_n B_n + c_n C_n + d_n D_n) = -(\sigma_x^\infty \sin^2 \theta_o + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_o)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_n E_n + b_n F_n + c_n G_n + d_n H_n) = -(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin \theta_o \cos \theta_o \quad (13)$$

$$A_n = (-1/2) t_n(\theta) \cos^2 \theta_o + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx'}(\phi, \theta) t_n(\phi) b \cos \phi d\phi$$

$$B_n = (-1/2) t_n(\theta) \cos^2 \theta_o / \cos \theta + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx'}(\phi, \theta) t_n(\phi) b d\phi$$

$$C_n = (-1/2) t_n(\theta) \sin^2 \theta_o + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy'}(\phi, \theta) t_n(\phi) a \sin \phi d\phi$$

$$D_n = (-1/2) t_n(\theta) \sin^2 \theta_o \cos \theta + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy'}(\phi, \theta) t_n(\phi) a \sin \phi \cos \phi d\phi$$

$$E_n = (1/2) t_n(\theta) \sin \theta_o \cos \theta_o + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx'}(\phi, \theta) t_n(\phi) b \cos \phi d\phi$$

$$F_n = (-1/2) t_n(\theta) \sin \theta_o \cos \theta_o / \cos \theta + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx'}(\phi, \theta) t_n(\phi) b d\phi$$

$$G_n = (-1/2) t_n(\theta) \sin \theta_o \cos \theta_o + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy'}(\phi, \theta) t_n(\phi) a \sin \phi d\phi$$

$$H_n = (-1/2) t_n(\theta) \sin \theta_o \cos \theta_o \cos \theta + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy'}(\phi, \theta) t_n(\phi) a \sin \phi \cos \phi d\phi \quad (14)$$

任意の点の応力は係数 a_n, b_n, c_n, d_n と $A_n \sim H_n$ に相当する影響係数の一次結合で表される。以上の解析方法により無限板中の等大2円孔の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

表1 2円孔の干渉問題における境界に沿った密度
($\sigma_x^\infty=0, \sigma_y^\infty=1$)

a/b = 1 , a/d = 1/3					
θ (deg.)	M	ρ_{x3}	ρ_{y2}	ρ_{x1}	ρ_{y4}
0	4	-0.8914	2.9828	-0.0301	0.0528
	8	-0.8899	2.9787	-0.0401	0.0615
	12	-0.8899	2.9787	-0.0401	0.0615
20	4	-0.8972	2.9875	-0.0276	0.0517
	8	-0.8971	2.9853	-0.0282	0.0579
	12	-0.8971	2.9853	-0.0282	0.0579
40	4	-0.9120	2.9994	-0.0062	0.0489
	8	-0.9135	3.0000	-0.0026	0.0498
	12	-0.9135	3.0000	-0.0026	0.0498
60	4	-0.9288	3.0129	0.0180	0.0457
	8	-0.9288	3.0137	0.0197	0.0419
	12	-0.9288	3.0137	0.0197	0.0419
80	4	-0.9398	3.0217	0.0338	0.0436
	8	-0.9373	3.0211	0.0312	0.0375
	12	-0.9373	3.0211	0.0312	0.0375
90	4	-0.9413	3.0229	0.0360	0.0433
	8	-0.9384	3.0221	0.0326	0.0370
	12	-0.9384	3.0221	0.0326	0.0369

表2 2円孔の干渉問題における境界に沿った密度
($\sigma_x^\infty=1, \sigma_y^\infty=0$)

b/a = 1 , a/d = 1/3					
θ (deg.)	M	ρ_{x3}	ρ_{y2}	ρ_{x1}	ρ_{y4}
0	4	2.7796	-0.8476	0.0704	-0.1267
	8	2.7776	-0.8419	0.0764	-0.1394
	12	2.7776	-0.8419	0.0764	-0.1394
20	4	2.7894	-0.8564	0.0539	-0.1247
	8	2.7893	-0.8534	0.0548	-0.1338
	12	2.7893	-0.8534	0.0548	-0.1338
40	4	2.8140	-0.8786	0.0122	-0.1196
	8	2.8160	-0.8796	0.0068	-0.1209
	12	2.8160	-0.8796	0.0068	-0.1209
60	4	2.8420	-0.9038	-0.0352	-0.1138
	8	2.8418	-0.9050	-0.0377	-0.1081
	12	2.8418	-0.9050	-0.0377	-0.1082
80	4	2.8603	-0.9203	-0.0661	-0.1100
	8	2.8565	-0.9194	-0.0621	-0.1008
	12	2.8565	-0.9194	-0.0621	-0.1008
90	4	2.8628	-0.9226	-0.0704	-0.1095
	8	2.8584	-0.9212	-0.0652	-0.0998
	12	2.8584	-0.9212	-0.0652	-0.0998

3. 解析結果および考察

図3の無限板中の2円孔の問題において、形状比が $a/b=1$, $a/d=1/3$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$ の場合の円孔縁に沿った未知関数 ρ_{x3} , ρ_{y2} , ρ_{x1} , ρ_{y4} の収束状況を表1に, $b/a=1$, $a/d=1/3$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$ の場合を表2に示す。本解析結果は, $M=8$ 程度で有効数字5けた程度まで収束していて, 良好な収束性を示している。また, 図4, 5はそれぞれ表1, 2の解析結果をプロットしたものである。 ρ_{x1} , ρ_{x3} , ρ_{y2} , ρ_{y4} を分布させて解析した本解析では, 選点数 $M=8$ と $M=12$ の結果が有効数字5けた程度まで一致しており, 連続関数である真の密度分布

をよく近似している。参考のため, 特異積分方程式(6)の未知関数である ρ_x , ρ_y をそのまま階段関数で離散化した場合の解析結果も $M=12, 24$ の場合について示している。この場合には, 特に $\theta=90^\circ$ 近くで真の密度を表現できないために選点数(分割数)を増加しても密度が収束しないことがわかる。

次に, 境界条件 ($\sigma_n=0$, $\tau_{nt}=0$) の満足度確かめるために, 形状比が $a/b=1$, $a/d=1/3$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$ の場合円孔縁における応力 σ_t , σ_n , τ_{nt} の分布を表3に, $b/a=1$, $a/d=1/3$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$ の場合を表4に示す。前報⁽⁶⁾に示したように, 式(6)の未知関数 ρ_x , ρ_y を多項式で近似する方法では, 境界上に逆対称型の応力成

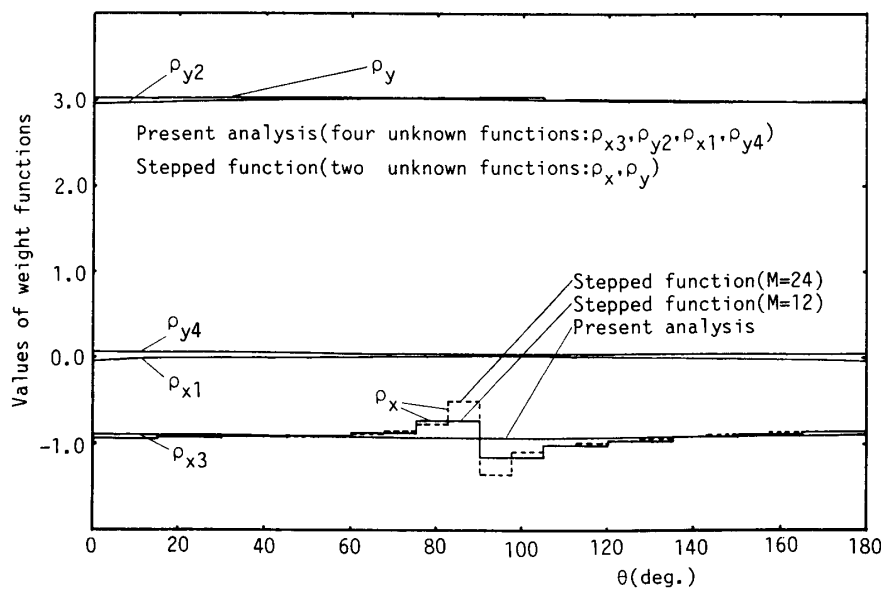


図4 未知関数の収束性の比較 ($\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

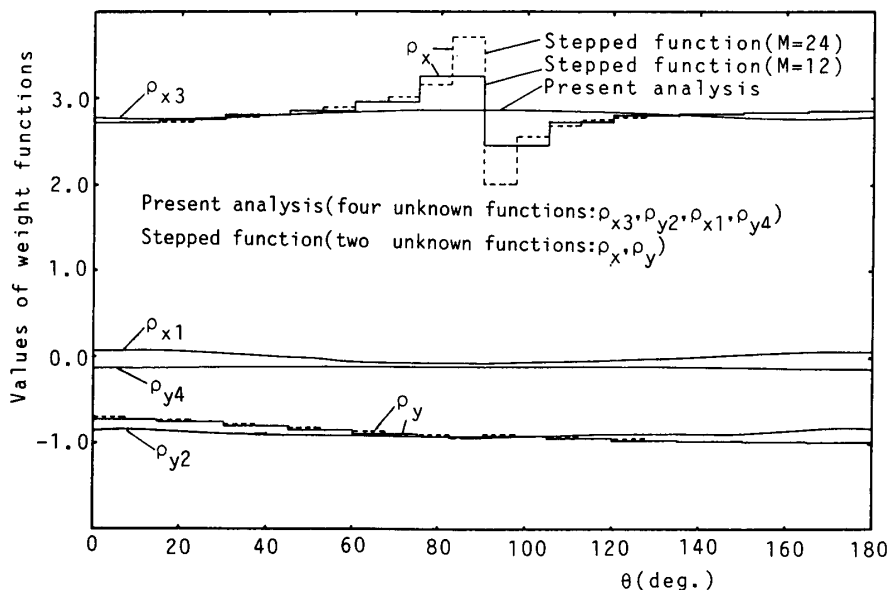


図5 未知関数の収束性の比較 ($\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

分が残る, 境界条件を完全には満足させることができなかった。一方本解析では, σ_n, τ_{nt} は円孔縁全周において $M=8$ 程度でも 10^{-5} 以下であり, 高い境界条件の満足度が確かめられた。

次に形状比が $a/b=1, \sigma_x^{\infty}=0, \sigma_y^{\infty}=1$ の場合, 点 A ($\theta=0^\circ$) および点 B ($\theta=180^\circ$) における応力集中係数の収束状況を Ling の解析結果とともに表 5 に, $b/a=1, \sigma_x^{\infty}=1, \sigma_y^{\infty}=0$ の場合を表 6 に示す。表 6 中の θ は最大応力が生じる位置である。本解析結果は $M=16$ 程度で有効数字 6 けたまで完全に収束して良好な収束性を示している。Ling の解析結果と比較すると, a/d が小さいとき両者はよく一致するが, a/d が大きくなるにつれて, 本解析結果との間に最大 2% 程度の違いが生じる。

表 3 2円孔の干渉問題における境界に沿った応力 (図 3, $\sigma_x^{\infty}=0, \sigma_y^{\infty}=1$)

$b/a = 1, a/d = 1/3$				
θ (deg.)	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	4	3.0188	-9.4×10^{-4}	0
	8	3.0197	-2.9×10^{-6}	0
	12	3.0197	-4.9×10^{-9}	0
40	4	1.3759	8.1×10^{-4}	-5.0×10^{-4}
	8	1.3747	-2.0×10^{-6}	1.2×10^{-6}
	12	1.3747	2.1×10^{-9}	-1.3×10^{-9}
80	4	-0.8154	-3.7×10^{-4}	8.7×10^{-4}
	8	-0.8135	-2.4×10^{-7}	5.6×10^{-7}
	12	-0.8135	1.1×10^{-9}	-2.7×10^{-9}
90	4	-0.9191	-3.1×10^{-4}	1.2×10^{-3}
	8	-0.9188	-8.6×10^{-7}	3.7×10^{-6}
	12	-0.9188	-1.3×10^{-9}	6.0×10^{-9}
100	4	-0.7812	-7.3×10^{-5}	1.0×10^{-3}
	8	-0.7829	-3.7×10^{-8}	7.0×10^{-7}
	12	-0.7829	1.5×10^{-10}	-3.2×10^{-9}
140	4	1.4358	-1.1×10^{-3}	-1.3×10^{-3}
	8	1.4379	2.4×10^{-6}	2.8×10^{-6}
	12	1.4379	-2.5×10^{-9}	-2.9×10^{-9}
180	4	2.9929	2.0×10^{-3}	0
	8	2.9908	5.4×10^{-6}	0
	12	2.9908	8.5×10^{-9}	0

最後に, 形状比が $a/d=1/3, 0.5, 2/3, \sigma_x^{\infty}=0, \sigma_y^{\infty}=1$ の場合, 形状比 a/b を変化させたとき, 点 A および点 B における応力集中係数の収束値を表 7 に, $\sigma_x^{\infty}=1, \sigma_y^{\infty}=0$ の場合, b/a を変化させたとき, 応力集中係数 K_t の最大値の収束値を, それが生じる位置とともに表 8 に示す。応力集中係数の値は, 有効数字 5 けた程度まで収束して, 形状比 a/b , および a/d の広範囲で本解析法が有効であることがわかった。

表 4 2円孔の干渉問題における境界に沿った応力 (図 3, $\sigma_x^{\infty}=1, \sigma_y^{\infty}=0$)

$b/a = 1, a/d = 1/3$				
θ (deg.)	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	4	-0.9376	-1.4×10^{-3}	0
	8	-0.9391	3.7×10^{-6}	0
	12	-0.9391	5.8×10^{-9}	0
40	4	0.6548	-1.2×10^{-3}	7.7×10^{-4}
	8	0.6567	2.5×10^{-6}	-1.6×10^{-6}
	12	0.6567	-2.5×10^{-9}	1.6×10^{-9}
80	4	2.7413	5.9×10^{-4}	1.3×10^{-3}
	8	2.7385	3.1×10^{-7}	-7.3×10^{-7}
	12	2.7384	-1.3×10^{-9}	3.2×10^{-9}
86	4	2.8190	5.9×10^{-4}	-1.7×10^{-3}
	8	2.8174	1.1×10^{-6}	3.8×10^{-6}
	12	2.8174	1.3×10^{-9}	-4.6×10^{-9}
88.6	4	2.8264	5.4×10^{-4}	-1.8×10^{-3}
	8	2.8255	1.1×10^{-6}	-4.5×10^{-6}
	12	2.8255	1.7×10^{-9}	-6.7×10^{-9}
90	4	2.8233	5.0×10^{-4}	-1.9×10^{-3}
	8	2.8228	1.1×10^{-6}	4.7×10^{-6}
	12	2.8228	1.6×10^{-9}	-7.1×10^{-9}
94	4	2.7910	3.6×10^{-4}	-1.9×10^{-3}
	8	2.7917	6.8×10^{-7}	-4.1×10^{-6}
	12	2.7917	7.7×10^{-10}	-4.9×10^{-8}
100	4	2.6735	1.3×10^{-4}	-1.6×10^{-3}
	8	2.6761	5.1×10^{-8}	-8.8×10^{-7}
	12	2.6761	-1.9×10^{-10}	3.8×10^{-9}
140	4	0.5597	1.6×10^{-3}	1.9×10^{-3}
	8	0.5567	-3.0×10^{-6}	-3.5×10^{-6}
	12	0.5567	3.0×10^{-9}	3.4×10^{-9}
180	4	-0.8381	-3.0×10^{-3}	0
	8	-0.8350	-6.7×10^{-6}	0
	12	-0.8350	-1.0×10^{-8}	0

表 5 無限板中の 2 円孔の応力集中係数 (図 3, $a/b=1, \sigma_x^{\infty}=0, \sigma_y^{\infty}=1$)

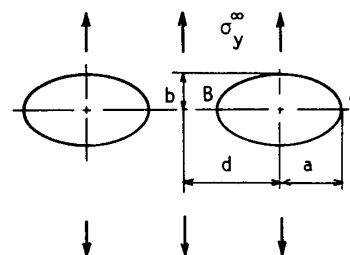
	$a/d = 0.125$		$a/d = 0.2$		$a/d = 1/3$		$a/d = 0.5$		$a/d = 2/3$	
M	K_{tA}	K_{tB}	K_{tA}	K_{tB}	K_{tA}	K_{tB}	K_{tA}	K_{tB}	K_{tA}	K_{tB}
4	3.00102	2.99916	3.00421	2.99710	3.01833	2.99298	3.05959	3.02098	3.13690	3.24366
8	3.00103	2.99914	3.00430	2.99694	3.01978	2.99085	3.06415	3.00494	3.14557	3.18813
12	3.00103	2.99914	3.00430	2.99694	3.01979	2.99086	3.06422	3.00476	3.14592	3.18690
16	3.00103	2.99914	3.00430	2.99694	3.01979	2.99086	3.06422	3.00476	3.14592	3.18689
20									3.14592	3.18689
Ling[7]	3.001	2.999	3.004	2.997	3.020	2.992	3.066	3.020	3.151	3.264

表 6 無限板中の2円孔の応力集中係数 (図3, $b/a=1$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

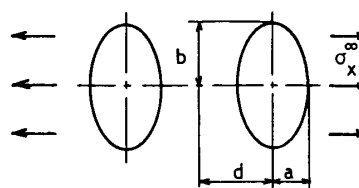
a/d	0.125	0.2	1/3	0.5	2/3
	K_t	K_t	K_t	K_t	K_t
M	$\theta=89.9^\circ$	$\theta=89.6^\circ$	$\theta=88.6^\circ$	$\theta=86.7^\circ$	$\theta=85.0^\circ$
4	2.96980	2.92673	2.82645	2.71621	2.67737
8	2.96980	2.92669	2.82554	2.70667	2.64130
12	2.96980	2.92669	2.82553	2.70652	2.63978
16	2.96980	2.92669	2.82553	2.70652	2.63976
20					2.63976
Ling[7]	2.970	2.927	2.825	2.703	2.623

 表 7 無限板中の2円孔の応力集中係数 ($\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

a/d	1/3		0.5		2/3	
a/b	K_{tA}	K_{tB}	K_{tA}	K_{tB}	K_{tA}	K_{tB}
1	3.0198	2.9909	3.0642	3.0048	3.1459	3.1869
2	5.0448	5.0468	5.1097	5.1276	5.2201	5.3287
4	9.0966	9.1290	9.2199	9.3480	9.4130	9.8090
8	17.198	17.276	17.444	17.748	17.820	18.733


 表 8 無限板中の2円孔の最大応力の生じる位置と応力集中係数 ($\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

a/d	1/3		0.5		2/3	
b/a	(deg.)	K_t	(deg.)	K_t	(deg.)	K_t
1	88.6	2.8255	86.7	2.7065	85.0	2.6398
2	88.5	4.3929	87.4	4.2213	86.9	4.1963
4	88.7	7.3571	88.4	7.2900	88.4	7.3039
8	89.2	13.400	89.2	13.365	89.2	13.350



4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を厳密に解くことにより、切欠きの干渉問題の一般的な解析方法を考察した。結果をまとめると以下になる。

(1) 一般的な切欠きの干渉問題の境界条件を完全に満足させるために、 x 方向および y 方向の体積力に関するそれぞれ4種類の基本密度関数を提案した。そして特異積分方程式の未知関数である体積力密度をこれらの基本密度関数と多項式の積で近似する解析方法を示した。解析結果を前報の解析結果や、他の研究者の行った研究結果との比較を行い、本解析法の精度を確認した。

(2) 無限板中の2円孔の干渉問題の解析を行った。この問題は、前報で考察したように、これまでの解析で用いられているような引張型の体積力を分布させただけでは、境界上に逆対称型の応力成分が残り境界条件を完全には満足させることができなかった。しかし、本報で提案した解析方法によって、境界上のいずれの点でも境界条件をほとんど完全に満足させること

が可能となった。

(3) 引張型の体積力密度のみを未知関数とする従来の解析方法では、選点数(分割数)を増加しても未知関数の値が収束せず、解が精度良く求められない場合があるが、本解析法では少ない選点数で良好な収束性が得られた。

本研究に対して、多大のご助言ご指導いただいた九州大学・西谷弘信先生に心からお礼申し上げる。また、本研究の一部は平成3年度科学研究費奨励研究(A)の援助を受けた。記して謝意を表する。

文 献

- (1) 野田・梅木・Erdogan, 機論, 55-520, A (1989), 2512.
- (2) 野田・小田・陳, 機論, 56-532, A (1990), 2405.
- (3) 野田・小田・増田, 機論, 57-542, A (1991), 2332.
- (4) 野田・小田・石井, 機論, 59-558, A (1993), 332.
- (5) 野田・松尾, 機論, 57-543, A (1991), 2811.
- (6) 野田・松尾, 機論, 58-555, A (1992), 2179.
- (7) Ling, C. B., *J. Appl. Phys.*, 19 (1948), 77.
- (8) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (9) 西谷, 機誌, 70-580 (1967), 627.